НИКОЛАЙ ПЕТРОСОВИЧ ЕСАЯН

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПОСЛЕДНЕЙ ТЕОРЕМЫ ФЕРМА

1. ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРЕМЫ .

Последняя теорема Ферма формулируется следующим образом. Уравнение:

$$a^n + b^n = c^n \qquad (1)$$

для степеней n , больших 2, при не равных нулю целых числах a , b и c невозможно. Для того, чтобы доказать теорему для общего случая, достаточно доказать её для простых степеней n , что и стало целью нашего исследования.

2. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ЧИСЕЛ .

Любое нечётное число, большее 2, и любое чётное число, делящееся на 8, всегда могут быть представлены разностью квадратов двух других целых чисел, или произведением двух сопряжённых величин:

$$a = c^2 - b^2 ; \qquad (2)$$

$$a = (c - b)(c + b) . \qquad (2')$$

Рассмотрим данное утверждение в отдельности для нечётных и чётных чисел a .

2.1. Любое нечётное число a , большее 2, всегда может быть представлено разностью квадратов двух других целых чисел, или произведением двух сопряжённых величин, в соответствии с уравнениями (2) и (2').

В самом деле, любое нечётное число a , большее 2, всегда может быть представлено произведением двух неравных взаимно простых нечётных чисел a_1 и a_2 (если a - простое число, то - произведением единицы и самого числа a), преобразуемым в произведение двух сопряжённых величин, а следовательно - в разность квадратов двух других целых чисел:

$$a = a_1 a_2 ; \qquad a_1 a_2 = (c - b)(c + b) ; \qquad a_1 a_2 = c^2 - b^2 .$$

При нечётном числе a , большем 2, сопряжённым величинам $c - b$ и $c + b$ соответствуют следующие свойства:

- величины $c - b$ и $c + b$ образованы взаимно простыми числами c и b различной чётности;
- величины $c - b$ и $c + b$ - нечётные;
- величины $c - b$ и $c + b$ взаимно просты;
- сопряжённым величинам соответствует соотношение: $c - b < c + b$.

Если a - простое число, то справедливы выражения:

$$a = a_1 a_2 ; \qquad a_1 = 1 ; \qquad a_2 = a ; \qquad a = 1 \cdot a ;$$

$$1 \cdot a = (c - b)(c + b) .$$

Составив систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными c и b , имеем:

$$\begin{cases} c - b = 1 ; \\ c + b = a . \end{cases} \qquad b = \frac{a - 1}{2} ; \qquad c = \frac{a + 1}{2} .$$

Если a - составное число, то получим соотношения:

$$a = a_1 a_2 ; \qquad 1 < a_1 < a_2 ; \qquad a_1 a_2 = (c - b)(c + b) .$$

$$\begin{cases} c - b = a_1 ; \\ c + b = a_2 . \end{cases} \qquad b = \frac{a_2 - a_1}{2} ; \qquad c = \frac{a_2 + a_1}{2} .$$

Наименьшее нечётное число a , преобразуемое в разность квадратов двух других целых чисел, или в произведение двух сопряжённых величин, равно 3 :

$$a = a_1 a_2 ; \qquad a_1 = 1 ; \qquad a_2 = 3 ; \qquad a = 1 \cdot 3 .$$

$$\begin{cases} c - b = 1; \\ c + b = 3. \end{cases} \qquad b = 1; \qquad c = 2.$$

Составное число a может быть также преобразовано и как простое число, поэтому любому нечётному числу a, большему 2, всегда соответствуют выражения:

$$a = a_1\, a_2; \qquad a_1 = 1; \qquad a_2 = a; \qquad a = 1 \cdot a.$$

$$\begin{cases} c - b = 1; \\ c + b = a. \end{cases} \qquad b = \frac{a - 1}{2}; \qquad c = \frac{a + 1}{2}.$$

Данный способ преобразования нечётного числа a, большего 2, в разность квадратов двух других целых чисел, или в произведение двух сопряжённых величин, имеет вид последовательности:

$$3 = 2^2 - 1^2 = (2 - 1)(2 + 1); \qquad 2 - 1 = 1; \qquad 2 + 1 = 3;$$
$$5 = 3^2 - 2^2 = (3 - 2)(3 + 2); \qquad 3 - 2 = 1; \qquad 3 + 2 = 5;$$
$$7 = 4^2 - 3^2 = (4 - 3)(4 + 3); \qquad 4 - 3 = 1; \qquad 4 + 3 = 7;$$

……………………………………………………………………………………………

$$a = c^2 - b^2 = (c - b)(c + b); \qquad c - b = 1; \qquad c + b = a.$$

Значения чисел c и b определяются просто: это - соседние числа на числовой оси, сумма которых равна числу a. Если a - простое число, то это - единственный способ его преобразования. Если же a - составное число, то возможны и другие способы преобразования. В общем случае, то есть, для любого нечётного числа a, большего 2, значения чисел c и b определяются следующим образом: число c равноудалено от чисел a_1 и a_2, а число b и есть эта равноудалённость.

2.2. Любое чётное число a, делящееся на 8, всегда может быть представлено разностью квадратов двух других целых чисел, или произведением двух сопряжённых величин, в соответствии с уравнениями (2) и (2').

В самом деле, любое чётное число a, делящееся на 8, всегда может быть представлено произведением двух неравных чётных чисел a_1 и a_2, преобразуемым в произведение двух сопряжённых величин, а следовательно - в разность квадратов двух других целых чисел:

$$a = a_1\, a_2; \qquad a_1\, a_2 = (c - b)(c + b); \qquad a_1\, a_2 = c^2 - b^2.$$

При чётном числе a, делящемся на 8, сопряжённые величины $c - b$ и $c + b$ обладают следующими свойствами:

- величины $c - b$ и $c + b$ образованы взаимно простыми нечётными числами c и b;
- величины $c - b$ и $c + b$ - чётные;
- величины $c - b$ и $c + b$ имеют лишь один общий делитель - число 2;
- одна из величин $c - b$ и $c + b$ делится на 2 и не делится на 4, вторая же делится на 4, поэтому их произведение всегда делится на 8;
- сопряжённым величинам соответствует соотношение: $c - b < c + b$.

В этой связи справедливы выражения:

$$a = a_1\, a_2; \qquad 1 < a_1 < a_2; \qquad a_1\, a_2 = (c - b)(c + b).$$

$$\begin{cases} c - b = a_1; \\ c + b = a_2. \end{cases} \qquad b = \frac{a_2 - a_1}{2}; \qquad c = \frac{a_2 + a_1}{2}.$$

Если число a не содержит нечётных делителей, то получим:

$$a = a_1 a_2 ; \qquad a_1 = 2 ; \qquad a_2 = 2^{n-1} ; \qquad a = 2^n .$$

$$\begin{cases} c - b = 2 ; \\ c + b = 2^{n-1} . \end{cases} \qquad b = 2^{n-2} - 1 ; \qquad c = 2^{n-2} + 1 ,$$

где: n - любое целое число, большее 2.

Наименьшее чётное число a, преобразуемое в разность квадратов двух других целых чисел, или в произведение двух сопряжённых величин, равно 8 :

$$a = a_1 a_2 ; \qquad a_1 = 2 ; \qquad a_2 = 4 ; \qquad a = 2 \cdot 4 .$$

$$\begin{cases} c - b = 2 ; \\ c + b = 4 . \end{cases} \qquad b = 1 ; \qquad c = 3 .$$

Любому чётному числу a, делящемуся на 8, всегда соответствуют выражения:

$$a = a_1 a_2 ; \qquad a_1 = 2 ; \qquad a_2 = 4d ; \qquad a = 2 \cdot 4d .$$

$$\begin{cases} c - b = 2 ; \\ c + b = 4d . \end{cases} \qquad b = 2d - 1 ; \qquad c = 2d + 1 ,$$

где: d - любое целое число, большее нуля.

Данный способ преобразования чётного числа a, делящегося на 8, в разность квадратов двух других целых чисел, или в произведение двух сопряжённых величин, имеет вид последовательности:

$$8 = 2 \cdot 4 \cdot 1 = 3^2 - 1^2 = (3 - 1)(3 + 1); \; 3 - 1 = 2; \; 3 + 1 = 4;$$

$$16 = 2 \cdot 4 \cdot 2 = 5^2 - 3^2 = (5 - 3)(5 + 3); \; 5 - 3 = 2; \; 5 + 3 = 8;$$

$$24 = 2 \cdot 4 \cdot 3 = 7^2 - 5^2 = (7 - 5)(7 + 5); \; 7 - 5 = 2; \; 7 + 5 = 12;$$

....

$$a = 2 \cdot 4d = c^2 - b^2 = (c - b)(c + b); \; c - b = 2; \; c + b = 4d .$$

Значения чисел c и b определяются просто: это ближайшие нечётные числа на числовой оси, сумма которых равна половине числа a. Если число a содержит только делители, равные 2, то это - единственный способ его преобразования. Если число a содержит как чётные, так и нечётные делители, то возможны и другие способы преобразования. В общем случае, то есть, для любого чётного числа a, делящегося на 8, значения чисел c и b определяются следующим образом: число c равноудалено от чисел a_1 и a_2, а число b и есть эта равноудалённость.

2.3. Для нечётных чисел, больших 2, и чётных чисел, делящихся на 8, могут быть составлены одна или несколько систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными, то есть, указанные числа могут быть представлены разностью квадратов двух других целых чисел, или произведением двух сопряжённых величин, одним или несколькими способами.

Вначале рассмотрим нечётные числа a, большие 2. Простое число a есть произведение самого себя на единицу. Составное число a есть произведение нескольких простых сомножителей, не равных единице. Для простого числа a может быть составлена только одна система двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$a = 1 \cdot a . \qquad \begin{cases} c - b = 1 ; \\ c + b = a . \end{cases}$$

То есть, простое число a преобразуется в разность квадратов двух других целых чисел, или в произведение двух сопряжённых величин, лишь одним способом.

Если a - составное число, содержащее два простых делителя, не равных единице:

$$a = a_1 a_2 ; \qquad 1 < a_1 < a_2 ,$$

то получим две системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} c - b = 1 ; \\ c + b = a . \end{cases} \qquad \begin{cases} c - b = a_1 ; \\ c + b = a_2 . \end{cases}$$

Если нечётное число a содержит три простых делителя, не равных единице:

$$a = a_1 a_2 a_3 ; \qquad 1 < a_1 < a_2 < a_3 ,$$

то вначале получим три системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} c - b = 1 ; \\ c + b = a . \end{cases} \qquad \begin{cases} c - b = a_1 ; \\ c + b = a_2 a_3 . \end{cases} \qquad \begin{cases} c - b = a_2 ; \\ c + b = a_1 a_3 . \end{cases}$$

Кроме того, может быть составлена ещё одна система. При соотношении:

$$a_1 a_2 < a_3$$

получим следующую систему:

$$\begin{cases} c - b = a_1 a_2 ; \\ c + b = a_3 . \end{cases}$$

Если же справедливо соотношение:

$$a_1 a_2 > a_3 ,$$

то эта система примет вид:

$$\begin{cases} c - b = a_3 ; \\ c + b = a_1 a_2 . \end{cases}$$

Итак, если нечётное число a содержит три простых делителя, не равных единице, то имеем четыре системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными c и b. Для нечётного числа a, содержащего k простых делителей, не равных единице:

$$a = a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots\ldots\ldots a_k ; \qquad 1 < a_1 < a_2 < a_3 < \ldots\ldots\ldots\ldots < a_k ,$$

получим 2^{k-1} систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными c и b. Это означает, что указанное нечётное число a может быть представлено разностью квадратов двух других целых чисел, или произведением двух сопряжённых величин, 2^{k-1} различными способами.

Рассмотрим чётные числа a, делящиеся на 8. Если такие числа не содержат нечётных делителей:

$$a = 2^n ,$$

где: n - любое целое число, большее 2,

то возможен лишь один способ преобразования:

$$a = 2 \cdot 2^{n-1} . \qquad \begin{cases} c - b = 2 ; \\ c + b = 2^{n-1} . \end{cases}$$

То есть, чётное число a, делящееся на 8 и не имеющее нечётных делителей, преобразуется в разность квадратов двух других целых чисел, или в произведение двух сопряжённых величин, лишь одним способом. Для чётных чисел a, содержащих чётный и один простой делители:

$$a = 2^n d ,$$

где: d - простое число, большее 2,

имеем два способа преобразования. Вначале получим следующую систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными c и b:

$$\begin{cases} c - b = 2 ; \\ c + b = 2^{n-1} d . \end{cases}$$

Если при этом справедливо соотношение:

$$2^{n-2} < d ,$$

то имеем ещё одну систему уравнений:

$$\begin{cases} c - b = 2^{n-1}; \\ c + b = 2d. \end{cases}$$

Если же справедливо соотношение:

$$2^{n-2} > d,$$

то вторая система примет вид:

$$\begin{cases} c - b = 2d; \\ c + b = 2^{n-1}. \end{cases}$$

Если чётное число a содержит три делителя - чётное число 2^n и два простых числа d_1 и d_2, не равных единице, то получим четыре способа преобразования. Если же чётное число a содержит k делителей - чётное число 2^n и $k-1$ простых чисел $d_1, d_2, d_3 \ldots\ldots\ldots\ldots d_{k-1}$, не равных единице, то имеем 2^{k-1} систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными c и b. Это означает, что указанное чётное число a может быть представлено разностью квадратов двух других целых чисел, или произведением двух сопряжённых величин, 2^{k-1} различными способами.

Для нечётных чисел a, больших 2, всегда справедливы выражения:

$$a = a_1 a_2; \qquad a_1 = 1; \qquad a_2 = a; \qquad a = 1 \cdot a.$$

$$\begin{cases} c - b = 1; \\ c + b = a. \end{cases}$$

Для чётных же чисел a, делящихся на 8, всегда получим:

$$a = a_1 a_2; \qquad a_1 = 2; \qquad a_2 = 2^{n-1} d; \qquad a = 2^n d.$$

$$\begin{cases} c - b = 2; \\ c + b = 2^{n-1} d. \end{cases}$$

Таким образом, для нечётных чисел a, больших 2, всегда может быть составлена система двух линейных уравнений с двумя неизвестными c и b, в которой разность $c - b$ равна единице. Для чётных чисел a, делящихся на 8, всегда получим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными c и b, в которой разность $c - b$ равна 2.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИЗНАКОВ СОПРЯЖЁННОСТИ .

Признаки сопряжённости определяют условия преобразования целого числа a в произведение двух сомножителей, являющихся разностью и суммой двух взаимно простых целых чисел. Нечётное число a, большее 2, всегда преобразуется в произведение двух сопряжённых величин, являющееся произведением разности и суммы двух взаимно простых чисел различной чётности. Чётное число a, делящееся на 8, всегда преобразуется в произведение двух сопряжённых величин, являющееся произведением разности и суммы двух взаимно простых нечётных чисел. Пусть число a - нечётное, и на этой основе строим наше дальнейшее исследование. Нечётное число a, большее 2, может быть преобразовано в произведение двух сопряжённых величин, если в качестве изначально данных мы имеем также оба его неравных взаимно простых делителя a_1 и a_2. Имея значения чисел a_1 и a_2, мы имеем значения сопряжённых величин $c - b$ и $c + b$, и через составление системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными определяем значения этих неизвестных - чисел c и b. То есть, числа a_1 и a_2 являются изначально данными, а числа c и b - их производными. Число a может быть также квадратом или любой иной степенью целого числа.

Признаки сопряжённости определяют также условия нахождения значения числа a_2 , являющегося сопряжённым изначально данному нечётному числу a_1 . Пусть имеем некоторое нечётное число a_1 , включая единицу, которому требуется найти сопряжённое число a_2 . В этом случае задача имеет бесконечное множество решений. В самом деле, можно найти бесконечное множество значений чисел c и b , разность которых равна числу a_1 . Сумма чисел c и b , а вместе с ней - всё произведение двух сопряжённых величин, также принимает бесконечное множество значений. В этой связи данному числу a_1 соответствует бесконечное множество значений числа a_2, которое могло бы составить с числом a_1 пару сопряжённых величин. Но если изначально данное число a_1 есть разность каких-то определённых значений чисел c и b , которые также даны изначально:

$$a_1 = c - b ,$$

то получим единственное значение сопряжённого ему числа a_2 , равное их сумме:

$$a_2 = c + b .$$

То есть, в этом случае в качестве изначально данных имеем значения нечётного числа a_1 и двух неравных взаимно простых чисел c и b различной чётности, разность которых равна числу a_1 . При этом требуется найти значение числа a_2 , являющегося сопряжённым числу a_1 . Поскольку сумма чисел c и b является сопряжённой их разности, и число a_1 равно этой разности, то, очевидно, сопряжённым числу a_1 может быть только число a_2 , равное сумме чисел c и b . Следовательно, единственное решение задачи возможно только при условии, если, наряду с числом a_1 , мы имеем также в качестве изначально данных числа c и b , разность которых равна числу a_1 . В этом случае получим единственное значение числа a_2 , образующего с числом a_1 пару сопряжённых величин, в связи с чем произведение этих величин также принимает единственное значение.

Данное целое число само по себе не определяет значение другого целого числа, являющегося ему сопряжённым. Любому нечётному числу a_1 , большему 2, всегда может быть подобрано любое простое по отношению к нему нечётное число a_2 (если число a_1 равно единице, то - любое нечётное число a), которое составило бы с ним пару сопряжённых величин. То есть, любые два неравных взаимно простых нечётных числа a_1 и a_2 (единица и любое нечётное число a) всегда могут составить такую пару. Но при определённых условиях любому нечётному числу a_1 может соответствовать только одно, простое по отношению к нему, нечётное число a_2 (числу a_1 , равному единице, - некоторое нечётное число a), являющееся ему сопряжённым. Эти условия состоят в том, что значение нечётного числа a_1 задаётся не само по себе, а как разность двух других взаимно простых чисел различной чётности. Сопряжённой этой разности может быть только сумма тех же чисел. Имея значения чисел c и b , разность которых равна числу a_1 , получим единственное сопряжённое ему число a_2 , равное сумме чисел c и b . Имея любое нечётное число (включая единицу), выбранное произвольно, всегда можем составить на его основе бесконечное множество пар сопряжённых величин. Имея любое нечётное число (включая единицу), как разность определённых значений уменьшаемого и вычитаемого, можем составить на его основе только одну пару сопряжённых величин.

Механизм формирования значений чисел c и b как производных изначально данного числа a и обоих его делителей a_1 и a_2 весьма несложен. Пусть в качестве изначально данного имеем нечётное число a, большее 2. Составное число a есть произведение двух нечётных взаимно простых чисел a_1 и a_2, не равных единице:

$$a = a_1 a_2 ; \qquad 1 < a_1 < a_2 .$$

Нетрудно увидеть, что число c равно среднему арифметическому чисел a_1 и a_2, а число b равно разности числа c и любого из чисел a_1 и a_2:

$$\begin{cases} c - b = a_1 ; \\ c + b = a_2 . \end{cases} \qquad c = \frac{a_1 + a_2}{2} ; \quad b = c - a_1 = a_2 - c .$$

Если нечётное число a есть произведение нескольких, не равных единице, взаимно простых сомножителей, то, соответственно, имеем несколько способов его преобразования (зависимость количества способов преобразования нечётного числа a от количества его простых делителей изложена выше). Для каждого из способов число a имеет вид произведения только двух нечётных взаимно простых сомножителей, на основе чего и составляются системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными c и b. Если же a - простое число, то получим выражения:

$$a = a_1 a_2 ; \qquad a_1 = 1 ; \qquad a_2 = a ; \qquad a = 1 \cdot a .$$

$$\begin{cases} c - b = 1 ; \\ c + b = a . \end{cases} \qquad c = \frac{1 + a}{2} ; \quad b = c - 1 = a - c .$$

То есть, при простом числе a число c равно половине числа, большего числа a на единицу, а число b меньше числа c на единицу.

Наиболее простой способ преобразования нечётного числа a, большего 2, который, в сущности, был изложен выше, состоит в следующем. Сумма двух соседних чисел на числовой оси всегда равна разности их квадратов:

$$c^2 - b^2 = (c - b)(c + b) ; \; c - b = 1 ; \; c^2 - b^2 = c + b .$$

Следовательно**,** любое нечётное число a, большее 2, всегда преобразуется в разность квадратов двух соседних чисел на числовой оси, равных в сумме числу a:

$$a = c + b ; \quad c - b = 1 ; \quad c + b = c^2 - b^2 ; \quad a = c^2 - b^2 .$$

Этим способом любое нечётное число a, большее 2 (простое или составное), всегда может быть представлено разностью квадратов двух других целых чисел, или произведением двух сопряжённых величин.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ .

В уравнении (1) при взаимно простых числах a, b и c одно из них - чётное, два других - нечётные. Поэтому одно из чисел a и b - всегда нечётное. Строим наши рассуждения на основе нечётного числа a. Уравнение (1) для второй степени может быть представлено в виде двух других уравнений:

$$a^2 = c^2 - b^2 ;$$
$$b^2 = c^2 - a^2 .$$

Преобразовав правые части этих уравнений, получим:

$$a^2 = (c - b)(c + b) ; \qquad (1')$$
$$b^2 = (c - a)(c + a) . \qquad (1'')$$

Уравнение (1) для нечётной n-ной степени, большей 2, также может быть представлено в виде двух других уравнений:

$$a^n = c^n - b^n;$$
$$b^n = c^n - a^n.$$

После преобразования правых частей этих уравнений получим:

$$a^n = (c - b)(c^{n-1} + c^{n-2}b + \ldots\ldots + b^{n-1}); \qquad (1''')$$
$$b^n = (c - a)(c^{n-1} + c^{n-2}a + \ldots\ldots + a^{n-1}). \qquad (1'''')$$

Исходя из этого, доказательство теоремы базируется на следующих предпосылках:
- свойства чисел, заключающиеся в том, что любое нечётное число, большее 2, и любое чётное число, делящееся на 8, всегда могут быть представлены разностью квадратов двух других целых чисел, или произведением двух сопряжённых величин, образованных этими числами;
- особенность уравнения (1), состоящая в том, что все три числа, которые входят в его состав, возведены в одну и ту же степень;
- особенность разности равных степеней двух чисел, заключающаяся в том, что она всегда преобразуется в произведение двух сомножителей, один из которых органически входит в состав пары сопряжённых величин;
- свойство уравнения (1), состоящее в том, что делителем степени числа a является разность, образованная уменьшаемым c и вычитаемым b, а делителем степени числа b - разность, образованная уменьшаемым c и вычитаемым a.

Указанные предпосылки определяют содержание нашего дальнейшего исследования. Если имеем уравнение, одна часть которого есть либо нечётное число, большее 2, либо чётное число, делящееся на 8, а другая часть содержит преобразование одного из таких чисел в разность квадратов двух других целых чисел, или в произведение двух сопряжённых величин, то уравнение существует в целых числах. В этом уравнении изначально данное целое число преобразуется непосредственно в разность квадратов двух других целых чисел, или в произведение двух сопряжённых величин. Такие преобразования имеют место в уравнениях (2) и (1) для второй степени. Если изначально данное число, соответствующее требованиям сопряжённости, не является степенью целого числа, то имеем уравнение (2), в котором только два числа из трёх, входящих в его состав, являются квадратами целого числа. В уравнении (2) только число a может быть представлено разностью квадратов двух других чисел, входящих в состав тройки a, b и c, или произведением двух сопряжённых величин, образованных этими числами. Если же изначально данное число, соответствующее требованиям сопряжённости, есть квадрат целого числа, то имеем уравнение (1) для второй степени, в котором все три числа, входящие в его состав, являются квадратами целого числа. В уравнении (1) и число a^2, и число b^2 могут быть представлены разностью квадратов двух других чисел, входящих в состав тройки a, b и c, или произведением двух сопряжённых величин, образованных этими числами. В уравнениях (1) и (2) при изначально данном числе a числа c и b - его производные. В уравнении (2) изначально данными могут быть также числа c и b, в связи с чем число a - их производное. В уравнении же (1) не при любых значениях чисел c и b в качестве их производного имеем квадрат целого числа.

Уравнения (2) и (2’) содержат преобразование целого числа a в разность квадратов двух других целых чисел, или в произведение двух сопряжённых величин. Имея в качестве изначально данных нечётное число a, большее 2, и оба его делителя a_1 и a_2, составляем систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными c и b, откуда получим значения этих неизвестных. Данным значениям числа a и его делителей a_1 и a_2 соответствуют единственные значения их производных - чисел c и b, в связи с чем имеем единственную тройку чисел a, b и c, образующих уравнение (2). При данных значениях делителей a_1 и a_2 число a преобразуется в произведение двух сопряжённых величин только одним способом. Если число a - простое, то ему соответствует единственная пара делителей a_1 и a_2, в связи с чем число a преобразуется в произведение двух сопряжённых величин единственным способом. Если число a - составное, то ему соответствуют несколько пар делителей a_1 и a_2, в связи с чем имеем несколько способов преобразования числа a в произведение двух сопряжённых величин. Однако для данной пары делителей a_1 и a_2 возможен только один способ преобразования числа a. Таким образом, нечётному числу a, большему 2, соответствует либо одно (если число a - простое), либо несколько (если число a - составное) значений чисел c и b, образующих произведение двух сопряжённых величин, в которое преобразуется число a. Но в любом случае значения чисел c и b будут оставаться в рамках множества их возможных значений, при которых уравнение (2) существует в целых числах. Вне указанного множества значений числа c и b не существуют. Это означает, что при любых значениях делителей a_1 и a_2 число a преобразуется в произведение двух сопряжённых величин только числами, входящими в состав тройки a, b и c и не преобразуется в такое произведение числами, отличными от a, b и c.

Уравнение (2) может быть также представлено в виде:

$$b^2 = c^2 - a,$$

Правая часть полученного уравнения не является разностью квадратов двух других чисел, входящих в состав тройки a, b и c, и этими числами в произведение двух сопряжённых величин не преобразуется. Если же число b^2 соответствует требованиям сопряжённости, то оно может быть представлено произведением двух сопряжённых величин, но только образованных числами, не входящими в состав тройки a, b и c. В этой связи уравнению (2) соответствует уравнение:

$$b^2 = (c_1 - a_1)(c_1 + a_1). \qquad (2'')$$

Как видно из рассмотрения уравнений (2') и (2''), числа a и b^2 преобразуются в произведение двух сопряжённых величин независимо друг от друга и только числами, не входящими в состав одной тройки. Если число b^2 преобразуется в произведение двух сопряжённых величин несколькими способами, то любой из этих способов будет соответствовать уравнениям (2) и (2').

Разность равных степеней двух чисел преобразуется в произведение двух сомножителей, один из которых всегда есть разность указанных чисел. Разность квадратов двух чисел преобразуется в произведение двух сомножителей, которое всегда есть произведение двух сопряжённых величин. В отличие от уравнения (2), преобразование целого числа в произведение двух сопряжённых величин, образованных числами, входящими в состав тройки a, b и c, содержится в обоих производных уравнения (1) для второй степени [уравнениях (1') и (1'')]. Имея в качестве изначально данных квадраты нечётного числа a, большего 2, и обоих его делителей a_1 и a_2, составляем систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными c и b , откуда получим значения этих неизвестных. Данным значениям числа a и обоих его делителей a_1 и a_2 соответствуют единственные значения их производных - чисел c и b , в связи с чем имеем единственную тройку чисел a , b и c , образующих уравнение (1). Другим значениям делителей a_1 и a_2 числа a (если число a - составное) будут, очевидно, соответствовать иные значения их производных. Однако при любых значениях делителей a_1 и a_2 числа a получим только целые значения чисел c и b . То есть, множеству возможных значений изначально данных чисел a_1 и a_2 соответствует такое множество значений их производных, при которых уравнение (1) существует в целых числах. Вне указанного множества значений числа c и b не существуют.

Уравнению (1) для второй степени соответствуют следующие свойства:
- уравнение (1) образовано тройкой чисел a , b и c ;
- в производных уравнения (1) числа a^2 и b^2 преобразуются в произведение двух сомножителей только одним способом и только одним и тем же способом;
- в производных уравнения (1) числа a^2 и b^2 преобразуются в произведение двух сомножителей, которое является произведением двух сопряжённых величин;
- в производных уравнения (1) числа a^2 и b^2 преобразуются в произведение двух сопряжённых величин только числами, входящими в состав одной тройки чисел, то есть, числами a , b и c ;
- в уравнениях (1') и (1'') числа a^2 и b^2 преобразуются в произведение двух сопряжённых величин только числами, входящими в состав одной тройки чисел, поэтому такие преобразования чисел a^2 и b^2 взаимосвязаны и взаимозависимы и не могут существовать порознь и независимо друг от друга;
- в уравнении (1') делителем числа a^2 является разность $c - b$, а в уравнении (1'') делителем числа b^2 является разность $c - a$.

Исходя из этого, в производных уравнения (1) делителями чисел a^2 и b^2 могут быть только разности, образованные числами a , b и c , и не могут быть разности, образованные числами, отличными от a , b и c . В этой связи очевидны следующие выводы: если делителем числа a^2 является разность $c - b$, то делителем числа b^2 может быть только разность $c - a$; соответственно, если делителем числа b^2 является разность $c - a$, то делителем числа a^2 может быть только разность $c - b$. То есть, в производных уравнения (1) разности $c - b$ и $c - a$ предопределяют существование друг друга, и только при таких условиях возможно существование как производных уравнения (1), так и самого уравнения (1). Это означает, что в производных уравнения (1) делителями чисел a^2 и b^2 являются не только величины разностей $c - b$ и $c - a$, но и сами эти разности, то есть, разности, образованные только уменьшаемыми и вычитаемыми, входящими в состав тройки a , b и c . Следовательно, в уравнении (1') делителем числа a^2 может быть только разность $c - b$, то есть, разность, образованная только уменьшаемым c и вычитаемым b , а в уравнении (1'') делителем числа b^2 может быть только разность $c - a$, то есть, разность, образованная только уменьшаемым c и вычитаемым a .

В уравнениях (1'), (1'') и (2') целое число преобразуется непосредственно в произведение двух сопряжённых величин, формируемых числами a , b и c . В уравнениях же (1''') и (1'''') целое число преобразуется в произведение двух сомножителей, которое числами ***a*** , ***b*** и ***c*** не может быть представлено произведением двух сопряжённых величин. В самом деле, в произведении двух сомножителей в правой части уравнений (1’’’) и (1’’’’) только один из них органически входит в состав пары сопряжённых величин, второй сомножитель есть простое число по отношению ко второй величине такой пары. Однако правые части уравнений (1’’’) и (1’’’’) соответствуют требованиям сопряжённости, поэтому они всегда преобразуются в произведение двух сопряжённых величин, но только числами, отличными от ***a*** , ***b*** и ***c*** . Левые части уравнений (1’’’) и (1’’’’) также соответствуют требованиям сопряжённости [исключая случай ***a*** = ***1*** , при котором уравнение (1) в целых числах ***a*** , ***b*** и ***c*** не существует], поэтому также преобразуются в произведение двух сопряжённых величин и только числами, отличными от ***a*** , ***b*** и ***c*** . Если обе части каждого из уравнений (1’’’) и (1 ’’’’) могут быть представлены равными произведениями двух сопряжённых величин, то уравнения существуют в целых числах ***a*** , ***b*** и ***c*** . В этом случае уравнение (1) для нечётной ***n***-ной степени также существует в целых числах ***a*** , ***b*** и ***c*** . Если же обе части каждого из уравнений (1’’’) и (1 ’’’’) не могут быть представлены равными произведениями двух сопряжённых величин, то уравнения в целых числах ***a*** , ***b*** и ***c*** не существуют. В этом случае уравнение (1) для нечётной ***n***-ной степени в целых числах ***a*** , ***b*** и ***c*** также не существует. Так как уравнения (1’’’) и (1’’’’) связаны между собой через уравнение (1), то для выявления возможности их существования в целых числах ***a*** , ***b*** и ***c*** достаточно рассмотреть лишь одно из этих уравнений. Если, к примеру, обе части уравнения (1’’’) могут быть представлены равными произведениями двух сопряжённых величин, то уравнение существует в целых числах ***a*** , ***b*** и ***c*** , а вместе с ним в целых числах ***a*** , ***b*** и ***c*** существует и уравнение (1’’’’). Если же обе части уравнения (1’’’) не могут быть представлены равными произведениями двух сопряжённых величин, то уравнение в целых числах ***a*** , ***b*** и ***c*** невозможно, а вместе с ним в целых числах ***a*** , ***b*** и ***c*** невозможно и уравнение (1’’’’).

Рассмотрим уравнение (1) для нечётной ***n***-ной степени, большей 2. Как упоминалось выше, разность равных степеней двух чисел преобразуется в произведение двух сомножителей, один из которых всегда есть разность указанных чисел. Поэтому в производных уравнения (1) степени чисел ***a*** и ***b*** представлены произведением двух сомножителей, один из которых есть разность, образованная двумя другими числами, входящими в состав тройки ***a*** , ***b*** и ***c*** , то есть, одна из разностей ***c - b*** и ***c - a*** . Нечётная степень целого числа, большего единицы, всегда может быть представлена произведением двух сопряжённых величин. Разность равных нечётных степеней двух взаимно простых чисел, больших нуля, также всегда может быть представлена произведением двух сопряжённых величин. Но если нечётная степень целого числа, большего единицы, и разность тех же нечётных степеней двух других взаимно простых чисел, больших единицы, объединены в одно уравнение, то это уравнение приобретает свойства, влияющие на возможность его существования в целых числах. В частности, если нечётная степень числа ***a*** и разность тех же нечётных степеней чисел ***c*** и ***b*** объединены в одно уравнение, то это уравнение может быть преобразовано в другое уравнение, в котором объединены нечётная степень числа ***b*** и разность тех же нечётных степеней чисел c и a. Поэтому делителем степени числа a является разность $c - b$, полученная в результате преобразования разности тех же степеней чисел c и b в произведение двух сомножителей. Соответственно, делителем степени числа b является разность $c - a$, полученная в результате преобразования разности тех же степеней чисел c и a в произведение двух сомножителей.

Уравнение (1) для нечётной n-ной степени, большей 2, соответствует таким уравнениям. Поэтому уравнение (1) обладает следующими свойствами:
- уравнение (1) образовано тройкой чисел a, b и c;
- в производных уравнения (1) числа a^n и b^n преобразуются в произведение двух сомножителей только одним способом и только одним и тем же способом;
- в производных уравнения (1) числа a^n и b^n преобразуются в произведение двух сомножителей, которые числами a, b и c не могут быть представлены произведением двух сопряжённых величин;
- в производных уравнения (1) числа a^n и b^n преобразуются в произведение двух сомножителей только числами, входящими в состав одной тройки чисел, то есть, числами a, b и c;
- в уравнениях (1’’’) и (1’’’’) числа a^n и b^n преобразуются в произведение двух сомножителей только числами, входящими в состав одной тройки чисел, поэтому такие преобразования чисел a^n и b^n взаимосвязаны и взаимозависимы и не могут существовать порознь и независимо друг от друга;
- в уравнении (1’’’) делителем числа a^n является разность $c - b$, а в уравнении (1’’’’) делителем числа b^n является разность $c - a$.

Исходя из этого, в производных уравнения (1) делителями чисел a^n и b^n могут быть только разности, образованные числами a, b и c, и не могут быть разности, образованные числами, отличными от a, b и c. В этой связи очевидны следующие выводы: если делителем числа a^n является разность $c - b$, то делителем числа b^n может быть только разность $c - a$; соответственно, если делителем числа b^n является разность $c - a$, то делителем числа a^n может быть только разность $c - b$. То есть, в производных уравнения (1) разности $c - b$ и $c - a$ предопределяют существование друг друга, и только при таких условиях возможно существование как производных уравнения (1), так и самого уравнения (1). Это означает, что в производных уравнения (1) делителями чисел a^n и b^n являются не только величины разностей $c - b$ и $c - a$, но и сами эти разности, то есть, разности, образованные только уменьшаемыми и вычитаемыми, входящими в состав тройки a, b и c. Следовательно, в уравнении (1’’’) делителем числа a^n может быть только разность $c - b$, то есть, разность, образованная только уменьшаемым c и вычитаемым b, а в уравнении (1’’’’) делителем числа b^n может быть только разность $c - a$, то есть, разность, образованная только уменьшаемым c и вычитаемым a.

Таким образом, в производных уравнения (1) числа a^n и b^n могут быть представлены произведением двух сомножителей только через разности $c - b$ и $c - a$. С другой стороны, числа a^n и b^n соответствуют требованиям сопряжённости, поэтому они всегда могут быть представлены произведением двух сопряжённых величин. В этой связи преобразование чисел a^n и b^n в произведение двух сопряжённых величин возможно только через разности $c - b$ и $c - a$, то есть, через разности, образованные тройкой чисел a , b и c , но не через разности, образованные числами, отличными от a , b и c . Однако числа a^n и b^n не могут быть представлены произведением двух сопряжённых величин таким способом, поскольку вторые сомножители в правой части уравнений (1’’’) и (1’’’’) являются простым числом по отношению к суммам $c + b$ и $c + a$, составляющим с разностями $c - b$ и $c - a$ пары сопряжённых величин. В этой связи в уравнениях (1’’’) и (1’’’’) числа a^n и b^n не могут быть представлены произведением двух сопряжённых величин числами a , b и c . Но в уравнениях (1’’’) и (1’’’’) числа a^n и b^n не могут быть представлены произведением двух сопряжённых величин и числами, отличными от a , b и c . Так как в уравнении (1) иных способов преобразования чисел a^n и b^n в произведение двух сопряжённых величин не существует, то это означает, что числа a^n и b^n вообще не могут быть представлены произведением двух сопряжённых величин. Однако это противоречит свойствам чисел, так как любое нечётное число, большее 2, и любое чётное число, делящееся на 8, всегда могут быть представлены таким произведением. Мы получили противоречие, означающее, что нечётная n-ная степень целого числа не может быть равна разности тех же n-ных степеней двух других целых чисел. Следовательно, уравнение (1) для нечётной n-ной степени, большей 2, в целых числах a , b и c не существует.

Итак, в уравнении (1) степени чисел a и b преобразуются в произведение двух сомножителей только через разности $c - b$ и $c - a$, которые органически входят в состав произведения двух сопряжённых величин. С другой стороны, степени чисел a и b соответствуют требованиям сопряжённости [кроме случая $a = 1$, при котором уравнение (1) не существует], поэтому всегда могут быть представлены произведением двух сопряжённых величин. Однако только в уравнении (1) для второй степени числа a^2 и b^2 преобразуются в произведение двух сомножителей, которое является произведением двух сопряжённых величин. Поэтому уравнение (1) для второй степени существует в целых числах a , b и c . В уравнении же (1) для нечётной n-ной степени, большей 2, числа a^n и b^n преобразуются в произведение двух сомножителей, которое числами a , b и c не может быть представлено произведением двух сопряжённых величин. Но других способов преобразования чисел a^n и b^n в произведение двух сомножителей не существует. Из этого следует, что числа a^n и b^n , соответствуя требованиям сопряжённости, не могут быть представлены произведением двух сопряжённых величин. Это противоречит свойствам целых чисел. Последняя теорема Ферма доказана.

НИКОЛАЙ ПЕТРОСОВИЧ ЕСАЯН
05 декабря 2008 года
Address: 7408 Kilcullen Drive, Charlotte, North Carolina, 28270 - 2210, USA
E-mail address: umnikim@aol.com